

Varianta 060

Subiectul I

- a) $z = \frac{1}{85}(59 + 2i) \Rightarrow \operatorname{Re} z = \frac{59}{85}$
 b) $DE = \sqrt{2}$
 c) $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$
 d) Evident M, N și P sunt pe dreapta $x = 0$
 e) $\text{Aria } [ABC] = 30\sqrt{3}$
 f) Evident latura este 12, deci diagonala $12\sqrt{2}$

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 6$

- b) Probabilitatea cerută este $\frac{1}{10}$
 c) Evident $g(x) = x - 1 \Rightarrow g(3) = 2$
 d) $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 1$ sau $x = -1$
 e) Produsul este 1

2.

- a) $f'(x) = 3^x \ln 3 + 1, (\forall) x \in \mathbf{R}$
 b) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\ln 3} + \frac{1}{2}$
 c) $f'(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ și cum $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, nu am puncte de extrem local
 d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1 + 3 \ln 3$
 e) $f(x) = 3^{2x} + x \Leftrightarrow x = 0$

Subiectul III

- a) Se verifică prin calcul direct
 b) Din a) ecuația devine $\frac{(3x - 2x^2)^2}{3} = 0 \Rightarrow x = 0$ și $x = \frac{3}{2}$
 c) Rezultă din a)

d) Pentru $n=1$ este evident, iar pentru $n=2$ este inegalitatea de la c) ; Sa aratam acum ca :

$$P_n \Rightarrow P_{n+1} \cdot \frac{x_1^2}{a_1} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} + \frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}} \geq \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{a_1 + \dots + a_n} + \frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}} \geq \frac{(x_1 + \dots + x_{n+1})^2}{a_1 + \dots + a_{n+1}}, \text{ am folosit}$$

prima dată P_n și a doua oară inegalitatea de la c) ;

$$\text{e) Din d) } n=3 \Rightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} > \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$$

$$\text{f) Din d), } n=3 \Rightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2(a+b+c)} = \frac{9}{2(a+b+c)}$$

g) Evident am $(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 \geq 0 (\forall)x \in \mathbf{R}$; ordonând după puterile lui x obținem: $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2x(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq 0$; știu că $4(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$ de unde rezultă inegalitatea cerută

Subiectul IV

$$\text{a) } f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = g(x), (\forall)x \in \mathbf{R}$$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow x = 0$ și cum $f'(x) < 0, (\forall)x < 0$ și $f'(x) > 0, (\forall)x > 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(-\infty; 0]$ și strict crescătoare pe $[0; +\infty)$

c) $f(0) = \ln 2$ și cum $x=0$ este punct de minim global $\Rightarrow f(x) \geq f(0) = \ln 2, (\forall)x \in \mathbf{R}$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$$

$$\text{e) } \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f'(x) dx = \ln \frac{e^2 + 1}{2} - 1$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty; m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \text{ (am folosit l'Hospital)}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{e^{2x} + 1}{e^x} - \ln e^x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}} = \ln 1 = 0 ; \text{ Deci } y=x \text{ asimptotă}$$

oblică către $+\infty$

g)

$$f(x) + f(2x) = \ln 4 \Leftrightarrow \ln \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) + \ln \left(e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} \right) = \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x + \frac{1}{e^x} \right)^3 - 2 \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) = 4 ; \text{ Notez } e^x + \frac{1}{e^x} = t \text{ cu } t > 0 \text{ și am}$$

$$t^3 - 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2 + 2y + 2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2 > 0 \text{ sau } (y^2 + 2y + 2) = 0 \text{ și obținem}$$

$$t_2, t_3 \notin \mathbf{R} . \text{ Deci } e^x + \frac{1}{e^x} = 2 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$